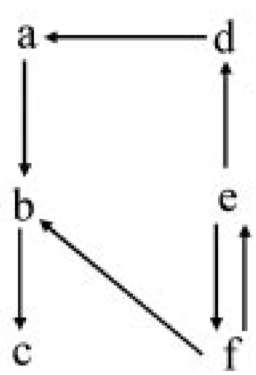
問合せ言語の意味論 4 —— Well-Founded Model

３値エルブランモデル

- 無理に真か偽を与えるのではなく, 真理値は「未定義」ということを許すモデル.
- 真となる IDB ファクトは p(a) のように, 偽は NOT p(a) のように明示し, リテラルの集合でモデルを表現する.
- 集合中で真か偽かが述べられていない IDB ファクトは未定義と考える.
- 集合中にない EDB ファクトは偽と考える.
- 未定義となっている IDB ファクトをすべて真と考え, ３値エルブランモデルを２値化するとエルブランモデルになることを要請.

例

ニムゲーム



- win(X) :- move(X,Y) & NOT win(Y)
  EDB = { move(a,b), move(b,c), move(d,a), move(e,d), move(e,f), move(f,b), move(f,e) }
- M = EDB + { NOT win(a), win(b), NOT win(c), win(d) }

非生成集合

- ルールの基礎代入例の集合, EDB ファクトの集合, 真となる集合が与えられたとする.
- U を次のどちらかの条件を満たす IDB ファクト A の集合とする.
  1. A は基礎代入例の頭部に出現しない.
  2. A が頭部に出現する任意の基礎代入例について, 次のどちらかが成立し, A を推論する障害となっている.
     - 本体に偽となるリテラルが存在.
     - 本体に U の元が存在.
       (A は U の他の元との間で「にわとりと卵」の関係に陥る)
- U を非生成集合 (Unfounded Set) と呼ぶ.
- 非生成集合の元は真と推論できない. 積極的に「偽」として推論を進める.

例

p(a) :- p(c) & NOT p(b)	p(d) :- q(a) & NOT q(b)
p(b) :- NOT p(a)	p(d) :- q(b) & NOT q(c)
p(e) :- NOT p(d)	q(a) :- p(d)
p(c)	q(b) :- q(a)
	q(c) :- NOT p(c)

- p(c) が真と仮定する.
- 非生成集合 { q(d), q(e), q(c), p(d), q(a), q(b) }
  - { q(d), q(e) } は頭部に出現しない.
  - { q(c) } は本体が偽.
  - { p(d), q(a), q(b) } は本体に非生成集合の元.

最大非生成集合

- 非生成集合はいくつも存在しうる.
- 非生成集合全体の和集合は, やはり非生成集合.
  最大非生成集合と呼ぶ.

論理プログラム

- path(X,Y) :- arc(X,Y)
  path(X,Y) :- arc(X,Z) & path(Z,Y)
  arc(a,b)
- 真となる集合 = {arc(a,b), path(a,b)}
- 真となる集合 {arc(a,b), path(a,b)} の補集合が非生成集合.
  - {arc(a,a), arc(b,a), arc(b,b)}
    基礎代入例の頭部に出現しない.
  - {path(a,a), path(b,a), path(b,b)}
    本体に非生成集合の元.

Well-Founded Model

- すべてのルールのすべての基礎代入例から, 偽となる EDB ファクトを本体に含むものを除去しておく.
- 初期状態ではすべての IDB ファクトの真理値は未定義とする.
- IDB ファクトの真偽が新たに確定しなくなるまで以下の推論を繰返す.
  - 本体が真のとき頭部を真と推論.
  - 最大非生成集合の元を「偽」と推論.
- このように積極的に否定の推論を進めても, 同一の IDB ファクトが真かつ偽であると推論することはない.

例

p(a) :- p(c) & NOT p(b)	p(d) :- q(a) & NOT q(b)
p(b) :- NOT p(a)	p(d) :- q(b) & NOT q(c)
p(e) :- NOT p(d)	q(a) :- p(d)
p(c)	q(b) :- q(a)
	q(c) :- NOT p(c)

- p(c) は真.
- 最大非生成集合　{ q(d), q(e), q(c), p(d), q(a), q(b) }
  - { q(d), q(e) } は頭部に出現しない.
  - { q(c) } は本体が偽.
  - { p(d), q(a), q(b) } は本体に非生成集合の元.
- p(e) が新たに真.
  最大非生成集合に新たな元の追加はない.
- Well-Founded Model =
  { p(c), NOT q(d), NOT q(e), NOT q(c), NOT p(d), NOT q(a), NOT q(b), p(e)}
- p(a), p(b) の真理値は未定義.

層状論理プログラム

- path(X,Y) :- arc(X,Y)
  path(X,Y) :- arc(X,Z) & path(Z,Y)
  arc(a,b)
  one-way(X,Y) :- path(X,Y) & NOT path(Y,X)
- 真となる集合 = {arc(a,b), path(a,b)}
- 真となる集合 {arc(a,b), path(a,b)} の補集合が最大非生成集合.
  - {arc(a,a), arc(b,a), arc(b,b)}
    基礎代入例の頭部に出現しない.
  - {path(a,a), path(b,a), path(b,b)}
    本体に最大非生成集合の元.
- 新たに真となる集合 = {one-way(a,b)}
- 最大非生成集合に新たに追加される元
  {one-way(a,a), one-way(b,a), one-way(b,b)}

  本体に偽となるリテラルが存在.
  one-way(a,a) :- path(a,a) & NOT path(a,a)
  one-way(b,a) :- path(b,a) & NOT path(a,b)
  one-way(b,b) :- path(b,b) & NOT path(b,b)

例

- win(X) :- move(X,Y) & NOT win(Y)
  EDB = { move(a,b), move(b,c), move(d,a), move(e,d), move(e,f), move(f,b), move(f,e) }
- 基礎代入例の生成 (読みやすさのため EDB ファクトを削除)

win(a) :- NOT win(b)	win(b) :- NOT win(c)
win(d) :- NOT win(a)	win(e) :- NOT win(d)
win(e) :- NOT win(f)	win(f) :- NOT win(b)
win(f) :- NOT win(e)	

- 1 回目の推論:
  真となる IDB ファクトは推論できない.
  最大非生成集合 = { win(c) }.
  従って NOT win(c) を新たに推論.
- 2 回目:
  win(b) を新たに真と推論.
  最大非生成集合 = { win(c), win(a) }.
  NOT win(a) を新たに推論.
- 3 回目:
  win(d) を新たに真と推論.
  最大非生成集合 = { win(c), win(a) }.
- Well-Founded Model =
  EDB + { NOT win(a), win(b), NOT win(c), win(d) }

定理　Well-Founded Model を生成してゆく過程で, 真の IDB ファクトの集合および偽の集合はともに単調増加し, ある時点で収束する. また, 同一の IDB ファクトが真かつ偽となることはない.

参考文献

- Allen Van Gelder and Kenneth A. Ross and John S. Schlipf. The well-founded semantics for general logic programs. *Journal of the ACM*, 38(3):620-650, July 1991.
- 森下「知識と推論」情報数学講座 10, 共立出版, 1994.

問題　Well-Founded Model, 最大非生成集合をどう計算するか？

Alternating 不動点法: Well-Founded Model の計算法

- すべてのルールのすべての基礎代入例を求め, 偽となる EDB ファクトを本体に含むものを除去しておく．また真となる EDB ファクトも読みやすさのため, 変数へ定数を代入したのちに除く．
- 最終的に真となる IDB ファクトの集合の subset(過小評価と呼ぶ) U と superset(過大評価) O を交互に計算.
- 初期ステップ: 過小評価 U を空集合に設定する．つまり, いかなる IDB ファクトも真でないと仮定する．
- 反復ステップ:
  1. U の補集合の元をすべて偽と仮定する (偽の集合の過大評価). 新たな IDB ファクトが得られなくなるまで推論を繰返すと, 真の集合の過大評価がえられるので, 結果を O に代入する．
  2. O の補集合の元をすべて偽と仮定する (偽の集合の過小評価). 新たな IDB ファクトが得られなくなるまで推論を繰返すと, 真の集合の過小評価がえられるので, 結果を U に代入する．
- U は単調増加し, O は単調減少し, 最終的に不動点に達する．

定理　不動点に達した U は Well-Founded Model の真の集合, 不動点に達した O の補集合は偽の集合, $O - U$ は未定義の集合である．

参考文献

- Allen Van Gelder. The alternating fixpoint of logic programs with negation. *Journal of Computer and System Sciences*, 47(1):185-221, August 1993

例

- プログラム

p(a) :- p(c) & NOT p(b)	p(d) :- q(a) & NOT q(b)
p(b) :- NOT p(a)	p(d) :- q(b) & NOT q(c)
p(e) :- NOT p(d)	q(a) :- p(d)
p(c)	q(b) :- q(a)
	q(c) :- NOT p(c)

- Alternating 不動点

	U	O	U	O	U
p(a)	-	+	-	+	-
p(b)	-	+	-	+	-
p(c)	-	+	+	+	+
p(d)	-	-	-	-	-
p(e)	-	+	+	+	+
q(a)	-	-	-	-	-
q(b)	-	-	-	-	-
q(c)	-	+	-	-	-
q(d)	-	-	-	-	-
q(e)	-	-	-	-	-

+: 真, -:偽

- 不動点
  U = {p(c), p(e)}
  O の補集合 = {p(d), q(a), q(b), q(c), q(d), q(e)}

- Well-Founded Model =
  { p(c), p(e),
  NOT p(d), NOT q(a), NOT q(b), NOT q(c), NOT q(d), NOT q(e) }

- $O - U$ = {p(a), p(b)} は未定義

例

- win(X) :- move(X,Y) & NOT win(Y)
  EDB = { move(a,b), move(b,c), move(d,a), move(e,d), move(e,f), move(f,b), move(f,e) }

- 基礎代入例の生成
  win(a) :- NOT win(b)　win(b) :- NOT win(c)
  win(d) :- NOT win(a)　win(e) :- NOT win(d)
  win(e) :- NOT win(f)　win(f) :- NOT win(b)
  win(f) :- NOT win(e)

- Alternating 不動点

	U	O	U	O	U	O
win(a)	-	+	-	-	-	-
win(b)	-	+	+	+	+	+
win(c)	-	-	-	-	-	-
win(d)	-	+	-	+	+	+
win(e)	-	+	-	+	-	+
win(f)	-	+	-	+	-	+

+: 真, -:偽

- Well-Founded Model =
  { NOT win(a), win(b), NOT win(c), win(d) }

- win(e), win(f) は未定義

問題

- p(X) :- arc(X,Y) & NOT q(Y)
  q(X) :- arc(X,Y) & NOT p(X)
  EDB = { arc(1,1), arc(1,2), arc(2,3) }
- Well-Founded Model を求めよ.

問題

- win(X) :- t(X,Y,Z) & NOT win(Y) & NOT win(Z)
- EDB = { t(a,c,f), t(b,a,c), t(c,d,e), t(d,b,c), t(e,f,g) } のとき
  Well-Founded Model を求めよ.
- EDB = { t(a,c,d), t(b,a,c), t(c,d,e), t(d,b,c), t(e,f,g) } のとき
  Well-Founded Model を求めよ.