問合せ言語の意味論 5 — ２値モデルと単一モデル

モデルの比較

	２値モデルか?	単一モデルか?	定義可能か?
局所的層状	○	○	△ （層が入らない場合あり）
Well-Founded Model	△ (３値の場合あり)	○	○
Stable Model	○	△ （複数の場合あり）	△ （複数の場合解釈が微妙）

モデル間で解釈が一致する場合

- 局所的層状エルブランモデルが存在するならば, そのモデルは Well-Founded Model と一致.
- Well-Founded Model が２値ならば, 極小 Stable Model は唯一つである.
- 証明： Allen Van Gelder and Kenneth A. Ross and John S. Schlipf. The well-founded semantics for general logic programs. *Journal of the ACM*, 38(3):620-650, July 1991.

微妙に食い違う場合

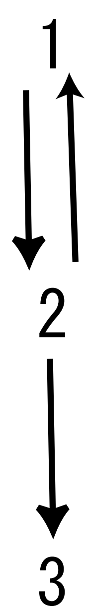
- 局所的層状エルブランモデルが定義できない場合, Well-Founded Model は３値になるのか, それとも２値の場合があるのか?
- 極小 Stable Model が唯一つの場合, Well-Founded Model は２値となるか?

Well-Founded Model は局所的層状エルブランモデルの保存的拡大

- 局所的層状エルブランモデルが存在するとき，それは Well-Founded Model と一致する．
- 局所的層状エルブランモデルが定義できなくても，２値の Well-Founded Model が存在する場合がある．
  - win(X) :- move(X,Y) & NOT win(Y)
    EDB = { move(1,2), move(2,1), move(2,3) }
  - win(1) :- NOT win(2)
    win(2) :- NOT win(1)
    win(2) :- NOT win(3)
  - Alternating 不動点

	U	O	U	O
win(1)	-	+	-	-
win(2)	-	+	+	+
win(3)	-	-	-	-

  - Well-Founded Model =
    EDB + { NOT win(1), win(2), NOT win(3) }

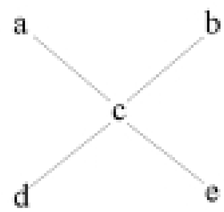


Stable Model と Well-Founded Model の関係

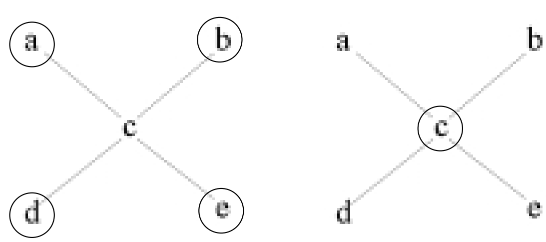
- Well-Founded Model が２値ならば, 極小 Stable Model は唯一つである.
  - 「極小」であることは必要.
  - p :- p
    q :- NOT r
  - ２値の Well-Founded Model
    {q}
  - Stable Model
    {p,q}
    {q} 極小
- 唯一つだけ極小 Stable Model が存在する場合でも, Well-Founded Model は２値とは限らない.
  - p :- NOT q
    q :- NOT p
    p :- NOT p
  - 唯一の Stable Model { p }
  - Well-Founded Model = ϕ
    p,q は未定義.
- しかし複数の極小 Stable Model が存在する場合にも, Well-Founded Model は３値ながら, 唯一つ存在.
  - win(X) :- move(X,Y) & NOT win(Y)
    EDB = { move(1,2), move(2,1) }
  - win(1) :- NOT win(2)
    win(2) :- NOT win(1)
  - ２つの極小 Stable Model
    {win(1)}, {win(2)}
  - Well-Founded Model = EDB + ϕ,
    つまり win(1), win(2) は未定義.

複数の極小 Stable Model が意味をもつ場合

- 連結した無向グラフ $G = (V, E)$ のノード集合 V が建物, 辺集合 E が建物の隣接関係を表現すると仮定.
- 休憩室 (lounge) がない建物には, カフェ(cafeteria) を設置.
  cafeteria(X) :- NOT lounge(X)
- 建物 X に隣接して存在する建物のどれかにカフェが設置されていれば, X に休憩室を設置.
  lounge(X) :- adj(X,Y) & cafeteria(Y)
- EDB = { adj(a,c), adj(c,a), adj(b,c), adj(c,b), adj(d,c), adj(c,d), adj(e,c), adj(c,e) } [1]



- Well-Founded Model = ϕ
- 極小 Stable Model 1
  { cafeteria(a), cafeteria(b), lounge(c), cafeteria(d), cafeteria(e) }
- 極小 Stable Model 2
  { lounge(a), lounge(b), cafeteria(c), lounge(d), lounge(e) }



1　　　　2

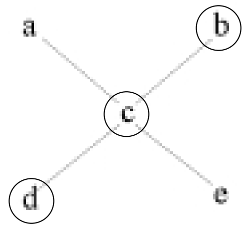
cafeteria に○

[1](注) EDB が adj(X,Y) を含むとき adj(Y,X) も含む. かわりに adj を IDB 述語として, 次のように定義してもよい.

adj(X,Y) :- adj(Y,X), adj(a,c), adj(b,c), adj(d,c), adj(e,c)

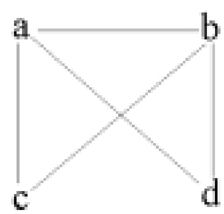
- 極小 Stable Model でない例 1
  { lounge(a), lounge(b), lounge(c), lounge(d), lounge(e) }
  １ステップ推論すると ϕ

- 極小 Stable Model でない例 2
  { lounge(a), cafeteria(b), cafeteria(c), cafeteria(d), lounge(e) }
  １ステップ推論すると
  { lounge(a), cafeteria(b), cafeteria(c), cafeteria(d), lounge(e) } $\cup$
  { lounge(b), lounge(c), lounge(d) }

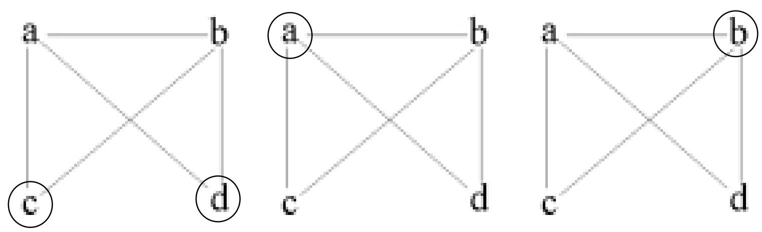


他の例

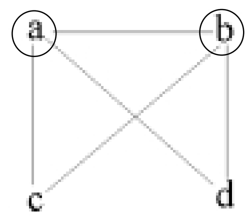
- EDB = { adj(a,b), adj(b,a), adj(a,c), adj(c,a), adj(a,d), adj(d,a), adj(b,c), adj(c,b), adj(b,d), adj(d,b) }



- 極小 Stable Model
  { lounge(a), lounge(b), cafeteria(c), cafeteria(d) }
  { cafeteria(a), lounge(b), lounge(c), lounge(d) }
  { lounge(a), cafeteria(b), lounge(c), lounge(d) }

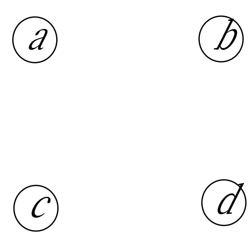


- 極小 Stable Model でない例
  { cafeteria(a), cafeteria(b), lounge(c), lounge(d) }



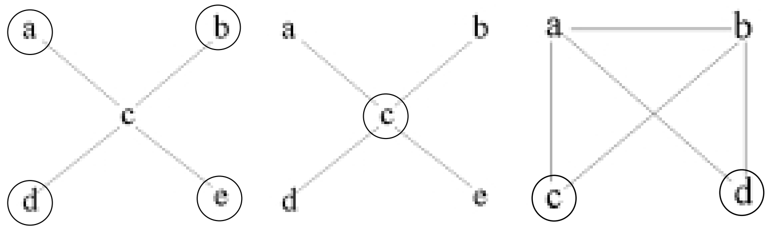
極小 Stable Model が唯一の場合

- cafeteria(X) :- NOT lounge(X)
  lounge(X) :- adj(X,Y) & cafeteria(Y)
- 定数 = {a, b, c, d}
  EDB = ϕ
- { cafeteria(a), cafeteria(b), cafeteria(c), cafeteria(d) }



Stable Model の計算量

- $G = (V, E)$ を連結無向グラフ. V の部分集合で, 任意の 2 点を結ぶ辺が存在しない集合を, Independent Set という.



- 元の数が k 個以上の Independence Set が存在するか否かを判定する問題は NP 完全.

- いま Independent Set I の元 (建物) がカフェをもち, それ以外の建物は休憩室をもつようにモデル M を決める.

- I が極大 Independent Set ならば, $V - I$ の任意の元 v と I の元との間に辺が存在 (辺が存在しなければ v を I に含めても Independent Set だが I の極大性に矛盾).

- I の元にはカフェを配置するので, $V - I$ の元 (建物) には休憩室が配置される. M は極小 Stable Model となる.

- 極小 Stable Model を枚挙することは NP 困難.

ちなみに Well-Founded Model の計算量

- 定数の数を有限とする. すべての基礎代入例における基礎原子式の出現の数（重複してカウント）を M.

- Alternating 不動点法で一つの過大評価（もしくは過小評価）を計算するのに M の多項式時間のオーダーで計算可能.

- Alternating 不動点法は高々 M 回だけ過大評価および過小評価を計算.

- よって Well-Founded Model は M の多項式時間のオーダーで計算可能.

Well-Founded Model が２値になる十分条件

- ２値の Well-Founded Model が存在すれば, 局所的層状エルブランモデルの保存的拡大であり, 極小 Stable Model でもあり, 各モデル間で解釈の相違がない.
- 与えられた論理プログラム＋ EDB の Well-Founded Model が２値か否か判定できるとうれしいが...
- 残念ながらは一般には (無限個の基礎原子式がある場合を想定すると) 決定不可能.

  Christos H. Papadimitriou and Mihalis Yannakakis. Tie-breaking semantics and structural totality. *Journal of Computer and System Sciences*, 54(1):48-60, February 1997.

- そこで２値の Well-Founded Model が存在することが保証されている論理プログラムのクラスが提案された.

  Kenneth A. Ross. Modular stratification and magic sets for datalog programs with negation. *Journal of the ACM*, 41(6):1216-1266, November 1994.

モジュラー層状論理プログラム

- ルールを以下の条件を満たすモジュールに分割.
  - 再帰的呼び出しがモジュール内で閉じるようにする.
  - モジュールに順序をつけ，下から上へ計算を進める.
  - 各モジュールは局所的層状エルブランモデルが定義でき, その際, 下位モジュールの局所的層状エルブランモデルを EDB のように利用する.
- モジュラー層状 (エルブラン) モデル ＝
  すべてのモジュールの局所的層状エルブランモデルの和集合.

例

- win(X) :- one-way(X,Y) & NOT win(Y)

  one-way(X,Y) :- path(X,Y) & NOT path(Y,X)
  path(X,Y) :- arc(X,Y)
  path(X,Y) :- arc(X,Z) & path(Z,Y)
  EDB = { arc(a,b), arc(b,a), arc(b,c) }

- 局所的層状にはならない. 例えば基礎代入例
  win(a) :- one-way(a,a) & NOT win(a)
  で one-way(a,a) は EDB の元でない.

- モジュール1
  one-way(X,Y) :- path(X,Y) & NOT path(Y,X)
  path(X,Y) :- arc(X,Y)
  path(X,Y) :- arc(X,Z) & path(Z,Y)
  EDB = { arc(a,b), arc(b,a), arc(b,c) }

  局所的層状エルブランモデル M1 = EDB + { path(a,b), path(b,a), path(b,c), path(a,a), path(b,b), one-way(a,c), one-way(b,c) }

- モジュール2
  win(X) :- one-way(X,Y) & NOT win(Y)

  局所的層状エルブランモデル = M1 + { win(a), win(b) }

- 最小エルブランモデル
  - M. H. Van Emden and R. A. Kowalski. The semantics of predicate logic as a programming language. *Journal of the ACM*, 23(4):733-742, October 1976.
  - Krzysztof R. Apt and M. H. Van Emden. Contributions to the theory of logic programming. *Journal of the ACM*, 29(3):841-862, July 1982.
- 層状論理プログラム
  - Apt, K. R., Blair, H. and Walker A.: Towards a theory of declarative knowledge. *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*, Morgan Kaufmann, pages 89-148, 1988.
  - Allen Van Gelder: Negation as failure using tight derivations for general logic programs. *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*, Morgan Kaufmann, 1988.
- 局所的層状論理プログラム
  Przymusinski, T.: On the declarative semantics of stratified deductive and logic programs. *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*, Morgan Kaufmann, 1988, pages 193-216.
- Stable Model
  Gelfond, M. and Lifschitz, V.: The stable model semantics for logic programming. *Proc. of the 5th Int'l Conf. and Symp. on Logic Programming*, IEEE, 1988, pages 1070-1080.
- Well-Founded Model
  Allen Van Gelder and Kenneth A. Ross and John S. Schlipf. The well-founded semantics for general logic programs. *Journal of the ACM*, 38(3):620-650, July 1991.
- Alternating 不動点
  Allen Van Gelder. The alternating fixpoint of logic programs with negation. *Journal of Computer and System Sciences*, 47(1):185-221, August 1993
- ２値の Well-Founded Model

- Kenneth A. Ross. Modular stratification and magic sets for datalog programs with negation. *Journal of the ACM*, 41(6):1216-1266, November 1994.
- Christos H. Papadimitriou and Mihalis Yannakakis. Tie-breaking semantics and structural totality. *Journal of Computer and System Sciences*, 54(1):48-60, February 1997.

- Well-Founded Model 計算の最適化
  - Weidong Chen and David S. Warren. Tabled evaluation with delaying for general logic programs. *Journal of the ACM*, 43(1):20-74, January 1996.
  - Shinichi Morishita. An extension of Van Gelder's alternating fixpoint to magic programs. *Journal of Computer and System Sciences*, 52(3):506-521, June 1996.

- 広く読まれている教科書
  S.Abiteboul, R.Hull and V.Vianu. *Foundations of Databases*. Addison-Wesley, 1995.